BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

Г.Ф.КУЛИЕВ, А.А.МЕХТИЕВ

Бакинский Государственный Университет

При приближенном решении прикладных задач оптимального управления необходимо вычислить градиент критерия качества, определенного на решениях уравнения, описывающего процесса. В работе рассматривается задача оптимального управления для слабо нелинейного уравнения колебаний стержня и для этой задачи вычисляется градиент функционала.

1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается в $Q=\{0<x<l;\ 0<t<T\}$ уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}=f(x,t,u(x,t),v(x,t)) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=u_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x) \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(0,t)=u(l,t)=\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0, \tag{3}$$

где $u(x,t)$ - состояние процесса, а $v(x,t)$ - управляющая функция.

За класс допустимых управлений U_{ad} берем заданное множество из $L_2(Q)$.

Ставится следующая задача: найти такое управление из U_{ad}, которое вместе с соответствующим решением задачи (1)-(3) доставляет минимум функционалу

$$J(v)=\iint_Q f_0(x,t,u(x,t),v(x,t))dxdt. \tag{4}$$

Под решением задачи (1)-(3) для каждого фиксированного $v(x,t)\in U_{ad}$ понимается функция $u(x,t)$ из $C(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l))$ (определение пространства $C(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l))$ см.[1]), которая для любой функции $\Phi(x,t)\in C(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l))$, такой, что $\Phi(x,T)=0$, удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint_Q \left[-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial x^2} \right] dxdt -$$

$$-\int_0^l u_1(x)\Phi(x,0)dx = \iint_Q f\ (x,t,u(x,t),v(x,t))\Phi(x,t)dxdt, \qquad (5)$$

причем выполнение условия $u(x,0)=u_0(x)$ понимается в обычном смысле.

Заметим, что такое решение $u(x,t)$ является непрерывной функцией на $\overline{Q}$.

Будем предполагать, что данные задачи удовлетворяют условиям

1^0. $u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$, $u_1 \in L_2(0,l)$.

2^0. Функции $f(x,t,u,v)$ и $f_0(x,t,u,v)$ непрерывны по совокупности своих аргументов вместе с частными производными по переменным u,v при $(x,t,u,v)\in \overline{Q}\times R\times R$ и кроме того, выполняются следующие условия:

$$\left| f(x,t,u+\Delta u,v+\Delta v) - f(x,t,u,v) \right| \le L\left(\left|\Delta u\right| + \left|\Delta v\right|\right), \qquad (6)$$

$$\left| f_u(x,t,u+\Delta u,v+\Delta v) - f_u(x,t,u,v) \right| \le L\left(\left|\Delta u\right| + \left|\Delta v\right|\right), \qquad (7)$$

$$\left| f_{ou}(x,t,u+\Delta u,v+\Delta v) - f_{0u}(x,t,u,v) \right| \le L\left(\left|\Delta u\right| + \left|\Delta v\right|\right), \qquad (8)$$

$$\left| f_v(x,t,u+\Delta u,v+\Delta v) - f_v(x,t,u,v) \right| \le L\left(\left|\Delta u\right| + \left|\Delta v\right|\right), \qquad (9)$$

$$\left| f_{ov}(x,t,u+\Delta u,v+\Delta v) - f_{0v}(x,t,u,v) \right| \le L\left(\left|\Delta u\right| + \left|\Delta v\right|\right) \qquad (10)$$

при всех $(x,t,u+\Delta u,v+\Delta v)\in \overline{Q}\times R\times R$, где $L = const \ge 0$.

2. Формула приращения функционала.

Пусть $v=v(x,t)$, $v+\Delta v = v(x,t)+\Delta v(x,t)$ два допустимых управления, а $u(x,t;v)$, $u(x,t;v+\Delta v)$ -соответствующим этим управлениям решения задачи (1)-(3).

Из условий, налагаемых на функцию $f(x,t,u,v)$, следует, что

$$\left| f(x,t,u,v) \right| \le \left| f(x,t,u,v) - f(x,t,0,0) \right| + \left| f(x,t,u,v) \right| \le$$

$$\le L\left(\left|u\right| + \left|v\right|\right) + \max_{(x,t)\in Q} \left| f(x,t,0,0) \right|.$$

Отсюда и из [2] следует существование и единственность решения задачи (1)-(3) из $C(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l))$ при всех $v(x,t)\in U_{ad}$. Обозначим $\Delta u = u(x,t;v+\Delta v) - u(x,t;v)$. Ясно, что Δu является решением следующей смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 \Delta u(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 \Delta u(x,t)}{\partial x^4}=f(x,t,u(x,t)+\Delta u(x,t),v(x,t)+ \qquad (11)$$
$$+\Delta v(x,t))-f(x,t,u(x,t),v(x,t)),$$

$$\Delta u(x,o)=0,\frac{\partial \Delta u(x,0)}{\partial t}=0, \qquad (12)$$

$$\Delta u(0,t)=\Delta u(l,t)=\frac{\partial \Delta u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial \Delta u(l,t)}{\partial x}=0, \qquad (13)$$

т.е. для любой функции $\psi(x,t)\in C(0,T,\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l))$, $\psi(x,T)=0$ удовлетворяется интегральное тождество

$$\iint\limits_Q\Bigg(-\frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 \Delta u(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}-\big[f(x,t,u(x,t),v(x,t)+\Delta v(x,t))- \qquad (14)$$
$$-f(x,t,u(x,t)),v(x,t))\big]\psi(x,t)\,dxdt=0.$$

Ясно, что

$$\Delta J(v)=J(v+\Delta v)-J(v)=\iint\limits_Q\big[\,f_0(x,t,u(x,t)+\Delta u(x,t),v(x,t)+\Delta v(x,t))- \qquad (15)$$
$$-f_0(x,t,u(x,t),v(x,t))\big]dxdt.$$

Из (14) и (15) следует, что

$$\Delta J(v)=J(v+\Delta v)-J(v)=\iint\limits_Q\big[f_0(x,t,u(x,t)+\Delta u(x,t),v(x,t)+\Delta v(x,t))-$$
$$-f_0(x,t,u(x,t),v(x,t))\big]dxdt-\iint\limits_Q\big[\,f(x,t,u(x,t)+\Delta u(x,t),v(x,t)+\Delta v(x,t))- \qquad (16)$$
$$-f(x,t,u(x,t),v(x,t))\big]\psi(x,t)dxdt+\iint\limits_Q\left[-\frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 \Delta u(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}\right]dxdt.$$

Примем обозначения

$$\mathrm{H}(x,t,u,v,\psi)=\psi f(x,t,u,v)-f_0(x,t,u,v).$$

Тогда

$$\Delta J(v)=-\iint\limits_Q\big[H(x,t,u(x,t)+\Delta u(x,t),v(x,t)+\Delta v(x,t),\psi(x,t))-$$
$$-H(x,t,u(x,t),v(x,t),\psi(x,t))\big]dxdt+$$
$$+\iint\limits_Q\left[-\frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 \Delta u(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}\right]dxdt$$

или

$$\Delta J(v) = -\iint_Q \big[H(x,t,u(x,t)+\Delta u(x,t),v(x,t)+\Delta v(x,t),\psi(x,t)) -$$
$$- H(x,t,u(x,t),v(x,t)+\Delta v(x,t),\psi(x,t)) + H(x,t,u(x,t),v(x,t)+\Delta v(x,t),\psi(x,t)) - \tag{17}$$
$$- H(x,t,u(x,t),v(x,t),\psi(x,t))\big]dxdt + \iint_Q \left[-\frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Delta u(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}\right]dxdt.$$

Из условий налагаемых на функции $f(x,t,u,v)$ и $f_0(x,t,u,v)$, следует, что

$$\Delta J(v) = -\iint_Q \frac{\partial H(x,t,u(x,t)+\theta_1\Delta u(x,t),v(x,t)+\Delta v(x,t),\psi(x,t))}{\partial u}\Delta u(x,t)dxdt -$$
$$-\iint_Q \frac{\partial H(x,t,u(x,t),v(x,t)+\theta_2\Delta v(x,t),\psi(x,t))}{\partial v}\Delta v(x,t)dxdt +$$
$$+\iint_Q \left[-\frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Delta u(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}\right]dxdt,$$

где $0 \le \theta_1, \theta_2 \le 1$.

Отсюда с помощью некоторых преобразований имеем

$$\Delta J(v) = -\iint_Q \left[\frac{\partial H(x,t,u(x,t)+\theta_1\Delta u(x,t),v(x,t)+\Delta v(x,t),\psi(x,t))}{\partial u} -\right.$$
$$\left.-\frac{\partial H(x,t,u(x,t),v(x,t),\psi(x,t))}{\partial u}\right]\Delta u(x,t)dxdt -$$
$$-\iint_Q \frac{\partial H(x,t,u(x,t),v(x,t),\psi(x,t))}{\partial u}\Delta u(x,t)dxdt -$$
$$-\iint_Q \left[\frac{\partial H(x,t,u(x,t),v(x,t)+\theta_2\Delta v(x,t),\psi(x,t))}{\partial v} -\right.$$
$$\left.-\frac{\partial H(x,t,u(x,t),v(x,t),\psi(x,t))}{\partial v}\right]\Delta v(x,t)dxdt -$$
$$-\iint_Q \frac{\partial H(x,t,u(x,t),v(x,t),\psi(x,t))}{\partial v}\Delta v(x,t)dxdt +$$
$$+\iint_Q \left[-\frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Delta u(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}\right]dxdt, \tag{18}$$

Теперь $\psi(x,t)$ выберем как обобщенное решение сопряженной задачи

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 \psi(x,t)}{\partial x^4} = \frac{\partial H\big(x,t,u(x,t),v(x,t),\psi(x,t)\big)}{\partial u}, \tag{19}$$

$$\psi(x,T)=0,\ \frac{\partial\psi(x,T)}{\partial t}=0, \tag{20}$$

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi(l,t)}{\partial x}=0. \tag{21}$$

Тогда для приращения функционала получим следующее выражение

$$\Delta J(v)=-\iint_Q \frac{\partial H(x,t,u(x,t),v(x,t),\psi(x,t))}{\partial v}\Delta v(x,t)dxdt+\eta, \tag{22}$$

где $\eta=\eta_1+\eta_2$,

$$\begin{gathered}\eta_1=-\iint_Q\Bigg[\frac{\partial H(x,t,u(x,t)+\theta_1\Delta u(x,t),v(x,t)+\Delta v(x,t),\psi(x,t))}{\partial u}-\\ -\frac{\partial H(x,t,u(x,t),v(x,t),\psi(x,t))}{\partial u}\Bigg]\Delta u(x,t)dxdt,\end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered}\eta_2=-\iint_Q\Bigg[\frac{\partial H(x,t,u(x,t),v(x,t)+\theta_2\Delta v(x,t),\psi(x,t))}{\partial v}-\\ -\frac{\partial H(x,t,u(x,t),v(x,t),\psi(x,t))}{\partial v}\Bigg]\times\Delta v(x,t)dxdt.\end{gathered} \tag{24}$$

3. Оценка решения задачи (11)-(13).

Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ фундаментальная система в $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ и $\int_0^l \varphi_k(x)\varphi_p(x)dx=\delta_k^p$.

Приближенные решения $\Delta u^N(x,t)$ задачи (11)-(13) ищем в виде

$\Delta u^N=\sum_{k=1}^N C_k^N(t)\varphi_k(x)$ из соотношений

$$\begin{gathered}\int_0^l \frac{\partial^2\Delta u^N(x,t)}{\partial t^2}\varphi_p(x)dx+\int_0^l \frac{\partial^2\Delta u^N(x,t)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi_p(x)}{\partial x^2}dx=\int_0^l\ [f(x,t,u(x,t)+\\ +\Delta u^N(x,t),v(x,t)+\Delta v(x,t))-f(x,t),u(x,t),v(x,t))\ ]\varphi_p(x)dx,\qquad p=1,\dots,N\end{gathered} \tag{25}$$

и

$$C_k^N(0)=0,\qquad \frac{d}{dt}C_k^N(t)\Bigg|_{t=0}=0. \tag{26}$$

Покажем, что для $\Delta u^N(x,t)$ справедлива оценка

$$\left\|\Delta u^N(x,t)\right\|_{C(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l))}\le C\left\|\Delta v(x,t)\right\|_{L_2(Q)}^2. \tag{27}$$

Умножая каждое из равенств (25) на свое $\frac{d}{dt}C_p^N(t)$ и суммируя по p от 1 до N, получим равенство

$$\int_0^l \frac{\partial^2 \Delta u^N(x,t)}{\partial t^2}\frac{\partial \Delta u^N(x,t)}{\partial t^2}dx+\int_0^l \frac{\partial^2 \Delta u^N(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^3 \Delta u^N(x,t)}{\partial x^2 \partial t}dx=\int_0^l [f(x,t,u(x,t)+$$

$$+\Delta u^N(x,t),v(x,t)+\Delta v(x,t))-f(x,t,u(x,t),v(x,t))]\frac{\partial \Delta u^N(x,t)}{\partial t}dx.$$

Отсюда имеем

$$\frac{d}{dt}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial^2 \Delta u^N(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \Delta u^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 \right]dx=$$

$$=2\int_0^l [f(x,s,u(x,s)+\Delta u^N(x,s),v(x,s)+\Delta v(x,s))-f(x,s,u(x,s),v(x,s))]dx.$$

Учитывая условия, налагаемые на функцию $f(x,t,u,v)$, и интегрируя это соотношение по t от 0 до t, получаем оценку

$$\int_0^l \left[\left(\frac{\partial^2 \Delta u^N(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \Delta u^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 \right]dx\le C\int_0^t\int_0^l \left[\left(\Delta u^N(x,s)\right)^2+\left(\frac{\partial \Delta u^N(x,s)}{\partial x}\right)^2 \right]\times$$

$$\times dxds+C\int_0^T\int_0^l (\Delta v(x,t))^2dxdt.$$

Здесь и в дальнейшем, через C будем обозначать различные постоянные .

Из эквивалентности норм в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ имеем:

$$\int_0^l \left[\left(\Delta u^N(x,t)\right)^2+\left(\frac{\partial \Delta u^N(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \Delta u^N(x,t)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 \Delta u^N(x,t)}{\partial x}\right)^2 \right]dx\le$$

$$\le C\int_0^t\int_0^l \left[\left(\Delta u^N(x,s)\right)^2+\left(\frac{\partial \Delta u^N(x,s)}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial \Delta u^N(x,s)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Delta u^N(x,s)}{\partial x^2}\right)^2 \right]\times$$

$$\times dxds+C\|(\Delta v(x,t))\|_{L_2(Q)}^2.$$

Отсюда, применяя лемму Гронуолла, получаем неравенство

$$\int_0^l \left[\left(\Delta u^N(x,t)\right)^2+\left(\frac{\partial \Delta u^N(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \Delta u^N(x,t)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 \Delta u^N(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 \right]dx\le$$

$$\le C\|(\Delta v(x,t))\|_{L_2(Q)}^2 \qquad \forall t\in[0,T],$$

из которого следует (27).

В силу (27) из последовательности $\{\Delta u^N(x,t)\}$ можно выбрать подпоследовательность (обозначим ее снова через $\{\Delta u^N(x,t)\}$), сходящуюся слабо в $C\left(0,T;\ \overset{0}{W}{}_2^2(0,l),\ L_2(0,l)\right)$ к некоторому элементу $\Delta u(x,t)\in C\left(0,T;\ \overset{0}{W}{}_2^2(0,l),\ L_2(0,l)\right)$. Покажем, что $\Delta u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (11)-(13). Для доказательства справедливости тожества (14) для предельной функции $\Delta u(x,t)$, умножим каждое из равенств (25) на свою функцию $d_p(t)\in W_2^2(0,T), d_p(T)=0$, полученные равенства просуммируем по всем p от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до T; после этого в первом слагаемом проведем интегрирование по частям, перенося $\dfrac{\partial}{\partial t}$ с Δu^N на $\chi\equiv\sum\limits_{p=1}^{N} d_p(t)\varphi_p(x)$.

Тогда получим тождество

$$\iint\limits_Q\left[-\frac{\partial\Delta u^N(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\chi(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2\Delta u^N(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\chi(x,t)}{\partial x^2}\right]dxdt=\iint\limits_Q[f(x,t,u(x,t)+$$

$$+\Delta u^N(x,t),v(x,t)+\Delta v(x,t))-f(x,t,u(x,t),v(x,t))]\chi(x,t)dxdt, \tag{28}$$

справедливое при любой функции χ вида $\sum\limits_{p=1}^{N} d_p(t)\varphi_p(x)$. Совокупность таких χ обозначим через $\Re_N$. В (28) можно перейти к пределу по выбранной подпоследовательности при фиксированном χ из какого-либо $\Re_{N_i}$. Это приводит к тождеству (14) для предельной функции $\Delta u(x,t)$ при любой $\chi\in\Re_{N_i}$. Так как $\Delta u(x,t)\in C(0,T;\ \overset{0}{W}{}_2^2(0,l),\ L_2(0,l))$, то (14) будет выполняться для $\Delta u(x,t)$ при любой $\chi\in C(0,T;\ \overset{0}{W}{}_2^2(0,l),\ L_2(0,l)),\ \chi(x,T)=0.$

Итак, мы доказали, что предельная функция $\Delta u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (11)-(13) из $C(0,T;\ \overset{0}{W}{}_2^2(0,l),\ L_2(0,l))$. Поскольку норма в банаховом пространстве слабо полунепрерывна снизу, то для предельной функции $\Delta u(x,t)$ справедлива оценка

$$\int\limits_0^l\left[(\Delta u(x,t))^2+\left(\frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\Delta u(x,t)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\Delta u(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\right]dx\le C\|\Delta v\|^2_{L_2(Q)}\ \forall t\in[0,T]. \tag{29}$$

4. Оценка остаточного члена η и формула для градиента функционала.

В силу условий налагаемые на функции $f(x,t,u,v)$ и $f_0(x,t,u,v)$ имеем

$$|\eta_1| \le \iint_Q \left| \frac{\partial H(x,t,u(x,t)+\theta_1 u(x,t), v(x,t)+\Delta v(x,t), \psi(x,t))}{\partial u} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial H(x,t,u(x,t),v(x,t),\psi(x,t))}{\partial u} \right| |\Delta u(x,t)| dxdt \le \iint_Q |\psi(x,t)| L(|\Delta u(x,t)| + |\Delta v(x,t)|) |\Delta u(x,t)| dxdt.$$

Поскольку $\psi(x,t) \in C(0,T;\ \overset{0}{W}{}_2^2(0,l),\ L_2(0,l))$, то $\psi(x,t)$ непрерывная функция на $\overline{Q}$. Поэтому

$$|\eta_1| \le C \iint_Q \left(|\Delta u(x,t)|^2 + |\Delta v(x,t)|^2 \right) dxdt.$$

С учетом неравенства (29) отсюда следует, что

$$|\eta_1| \le C \iint_Q |\Delta v(x,t)|^2 dxdt.$$

Аналогично

$$|\eta_2| \le \iint_Q \left| \frac{\partial H(x,t,u(x,t),v(x,t)+\theta_2 \Delta v(x,t) \psi(x,t))}{\partial v} - \frac{\partial H(x,t,u(x,t),v(x,t),\psi(x,t))}{\partial v} \right| |\Delta v(x,t)| dxdt \le$$

$$\le \iint_Q |\psi(x,t)| L |\Delta v(x,t)|^2 dxdt \le C \iint_Q |\Delta v(x,t)|^2 dxdt$$

Таким образом,

$$|\eta| \le C |\Delta v(x,t)|^2_{L_2(Q)}. \tag{30}$$

Тогда, из (22) и (30) следует, что функционал дифференцируем и градиент его определяется по формуле

$$J'(v) = -\frac{\partial H(x,t,u(x,t),v(x,t),\psi(x,t))}{\partial v}.$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема. Пусть данные задачи (1)-(4) удовлетворяют условиям 1^0, 2^0. Тогда функционал (4) дифференцируем по $v = v(x,t)$ в норме $L_2(Q)$ всюду на $L_2(Q)$, причем его градиент $J'(v)$ в точке $v = v(x,t)$ представим в виде

$$J'(v) = -\frac{\partial H(x,t,u(x,t),v(x,t),\psi(x,t))}{\partial v} = \frac{\partial f_0(x,t,u(x,t),v(x,t))}{\partial u} -$$

$$- \frac{\partial f(x,t,u(x,t),v(x,t))}{\partial u} \psi(x,t),$$

где $u = u(x,t)$ решение задачи (1)-(3), соответствующее управлению $v = v(x,t)$, а $\psi = \psi(x,t)$ является решением сопряженной задачи (19)-(21).

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981, 400 с.
2. Васильев Ф.П., Ишмухаметов Ф.З., Потапов М.М. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. Изд-во МГУ, 1989, 144 с.
3. Мехтиев А.А. О существовании решения задачи оптимального управления для уравнения колебаний стержня. Вестник БГУ, 2008, стр.63-74

ÇUBUĞUN RƏQSLƏRİ TƏNLİYİ ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏ MƏSƏLƏSİNDƏ QRADİYENTİN HESABLANMASI

H.F.QULIYEV, A.Ə.MEHDIYEV

XÜLASƏ

Optimal idarəetmənin tətbiqi məsələlərinin təqribi həlli zamanı prosesi təsvir edən tənliyin həlləri üzrə təyin olunmuş dəyər meyarının qradiyentini hesablamaq lazım gəlir. İşdə çubuğun rəqslərinin zəif qeyri-xətti tənliyi üçün optimal idarə məsələsinə baxılır və məsələ üçün funksionalın qradiyenti hesablanır.

A COMPUTATION OF GRADIENT IN THE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL FOR THE EQUATION OF A BAR OSCILLATION

H.F.KULIYEV, A.A.MEHTIYEV

SUMMARY

On the approximate solving of applied problems of optimal control it is necessary to calculate the gradient of quality criteria defined on the solutions of the equation describing the process. In the paper the problem of optimal control for weakly nonlinear equation of bar oscillations is considered and the gradient of the functional is calculated for this problem.